

2. Kolmost přímek a rovin

- KOLMOST PŘÍMEK n.n. $p \perp q$

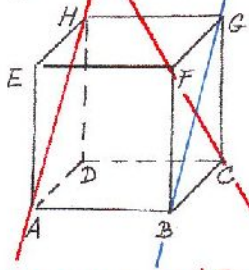
DEF.: Dvě přímky jsou na sobě kolmé $\Leftrightarrow$ jejich odchylka je 90°

$$p \perp q \Leftrightarrow |\angle pq| = 90^\circ \quad (\text{platí i pro mimoběžky})$$

(2 různých jsou k sobě kolmé $\Leftrightarrow$ mají kolmé přímky)

Příklady

① Dokažte, že $AH \perp CF$



p, q mimoběžky - bodem B vedeme $p' \parallel p$
 $\Rightarrow \varphi = |\angle pq| = |\angle p'q| = 90^\circ$ (p', q úhlopě.
 čtverce, jsou na
 sobě kolmé)
 $\Rightarrow p \perp q$ dle.

- KOLMOST PŘÍMKY A ROVINY

DEF.: Přímka a rovina jsou k sobě kolmé $\Leftrightarrow$ přímka je kolmá ke všem
 přímkám roviny

$$p \perp \rho \Leftrightarrow p \perp ku \forall q \subset \rho$$

$p \dots$ kolmice k rovině ρ
 $p \cap \rho = \{P\}$ $P \dots$ patná kolmice

- problém: dokázat $\perp$ ke $\forall q \subset \rho \Rightarrow$ KRITER. $\perp$

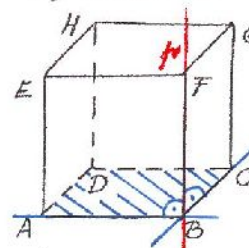
VĚTA 1 (KRITERIUM KOLMOSTI PŘÍMKY A ROVINY)

Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám
 roviny ρ , pak $p \perp \rho$.

Příklady

② Dokažte (dokažte), že

$$a) \Leftrightarrow BF \perp \Leftrightarrow ABC$$

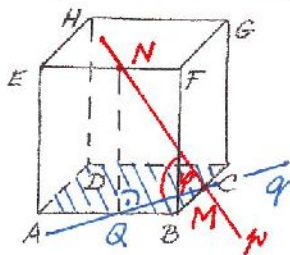


podle kritéria $\perp p$ a ρ hledáme 2 různoběžky
 v rovině $\rho \Leftrightarrow ABC$ kolmé, aby byly $\perp$ na p

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow BF \perp \Leftrightarrow AB, \quad \Leftrightarrow ABC \Leftrightarrow ABC \\ \Leftrightarrow BF \perp \Leftrightarrow BC, \quad \Leftrightarrow BC \Leftrightarrow ABC \end{aligned} \Rightarrow \text{podle krit. } \perp$$

$$\Rightarrow \Leftrightarrow BF \perp \Leftrightarrow ABC$$

$$b) \Leftrightarrow MN \perp \Leftrightarrow ABC, \quad M \text{ střed } BC, \quad N \text{ střed } EF$$



- je vidět, že $\Leftrightarrow MN$ není kolmá na $\Leftrightarrow ABC$

- kdyby byla, pak podle definice by měla být
 kolmá ke všem přímkami roviny ABC

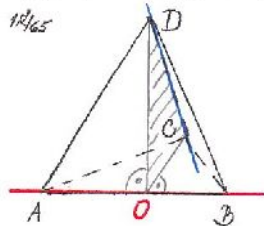
$\Rightarrow$ stačí nalézt 1 přímku $\Leftrightarrow ABC$, ke které není

$\Leftrightarrow MN$ kolmá - např. $\Leftrightarrow MN$ není kolmá na

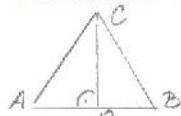
$\Leftrightarrow QM$ [QM odvěsna ΔMNG , $\varphi = |\angle QMN| \neq 90^\circ$
 - v Δ nemohou být 2 úhly pravé]

$$\Rightarrow \Leftrightarrow MN \text{ není } \perp \Leftrightarrow ABC \text{ dle.}$$

③ Dokažte, že v pravoúhlém čtyřlístku ABCD je $AB \perp CD$



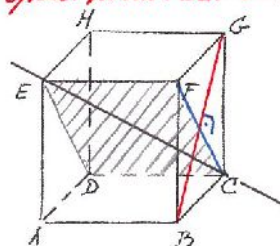
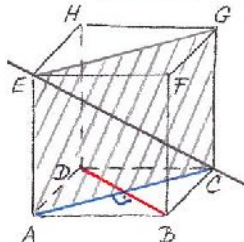
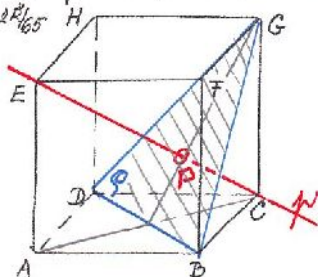
čtyřlístník pravoúhl. $\Rightarrow$ sloupky normostranné Δ
O... střed AB



$CO \perp AB$ (CO výška normostr. ΔABC)
 $DO \perp AB$ (DO výška normostr. ΔABD) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ podle KRITERIA $\perp$ p a q $\Rightarrow \Leftrightarrow AB \perp \Leftrightarrow CDO \Rightarrow$ podle DEFINICE
p-ku $AB \perp \Leftrightarrow CDO \Rightarrow AB \perp ku + p \subset \Leftrightarrow CDO$, tedy i k CD,
tj. $\Leftrightarrow AB \perp \Leftrightarrow CD$ dčd.

*
12/65 ④ Dokažte, že $\Leftrightarrow CE \perp \Leftrightarrow BDG$ složit. úlohy řešíme opak. nově. DEF a KRIT. p a q



1. dok., že $BD \perp \Leftrightarrow ACE$
(tedy i k CE)

$\Leftrightarrow BD \perp \Leftrightarrow AC \wedge \Leftrightarrow BD \perp \Leftrightarrow AE$
Axio. $\perp$

$\Leftrightarrow BG \perp \Leftrightarrow CF \wedge \Leftrightarrow BG \perp \Leftrightarrow EF$
Axio. $\perp$

2. dok., že $BG \perp \Leftrightarrow DCE$
(tedy i k CE)

$\Leftrightarrow BD \perp \Leftrightarrow ACE$
podle def.

$\Leftrightarrow BG \perp \Leftrightarrow DCE$
podle def.

3. $BD \perp \Leftrightarrow CE$ } $CE \perp \Leftrightarrow BDG$
 $BG \perp \Leftrightarrow CE$

$\Leftrightarrow BD \perp \wedge \Leftrightarrow CE$

$\Leftrightarrow BG \perp \wedge \Leftrightarrow CE$

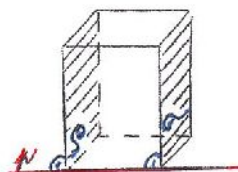
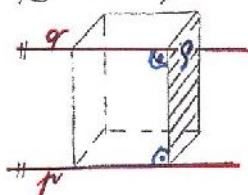
půsivák PE $\Leftrightarrow EC \perp \Leftrightarrow BDG$
P jako kolmici

podle KRIT. $\Leftrightarrow CE \perp \Leftrightarrow BD \wedge \Leftrightarrow CE \perp \Leftrightarrow BG$
(BD, BG 2 různoběžky $\Leftrightarrow BDG$)
 $\Rightarrow \Leftrightarrow CE \perp \Leftrightarrow BDG$ dčd.

VĚTY O KOLMOSTI PŘÍMEK A ROVIN

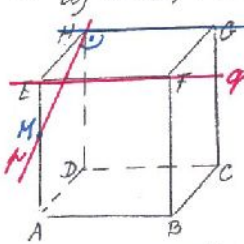
1. Právým bodem lze vést k dané rovině jedinou kolmici
2. Právým bodem lze vést k dané přímce jedinou kolmou přímku
3. Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$
 $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $q \perp p$
 $q \perp p$ a $p \perp r$, pak $q \parallel r$
 $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $p \perp r$

Pr. Dvě roviny jsou 3 na 3 rovnoběžné



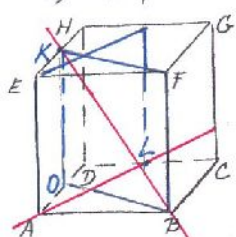
⑤ Víceúhelníková tělesa, přímky a roviny (K, L, M, N středy EH, CD, AE, CG)

3.10 a) $\leftrightarrow HM, \leftrightarrow EF$



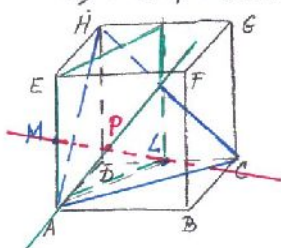
mimoběžky
 $\varphi = |\angle pq| =$
 $= |\angle pq'| = 90^\circ$
 (strany obdelníků)

c) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BK$



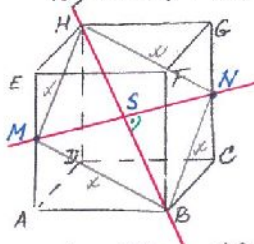
mimoběžky
 $\leftrightarrow KO \leftrightarrow AL$
 $\leftrightarrow BO \leftrightarrow AL$
 $\Rightarrow \leftrightarrow AL \leftrightarrow KBF$
 $\Rightarrow \leftrightarrow AL \perp KO$
 $\nexists p.l. \leftrightarrow KBF$
 $\Rightarrow \leftrightarrow AL \perp BK$

e) $\leftrightarrow LM, \leftrightarrow ACH$



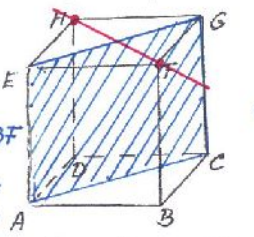
nýsou kolmé
 menajdemu
 2 přímky p, q
 kolmé na $\leftrightarrow LM$

b) $\leftrightarrow MN, \leftrightarrow BH$



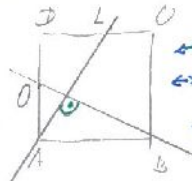
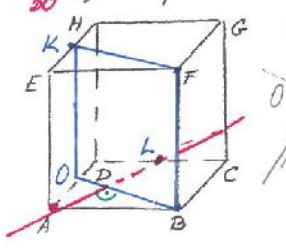
mimoběžky
 BNHM obecné
 úhlopříčky $\perp$
 $\Rightarrow \varphi = 90^\circ$

d) $\leftrightarrow FH, \leftrightarrow ACG$



hraniční $\perp$ na g
 $\leftrightarrow EG \perp \leftrightarrow HF, \leftrightarrow EGC \perp$
 $\leftrightarrow AC \perp \leftrightarrow HF, \leftrightarrow ACC \perp$
 $\Rightarrow \leftrightarrow HF \perp \leftrightarrow ACG$

f) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BFK$ (mim c)

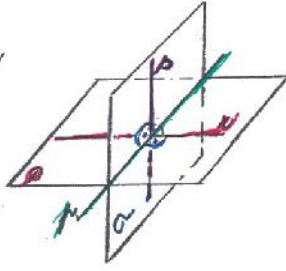


$\leftrightarrow OB \perp AL$
 $\leftrightarrow KO \perp AL$
 $\Rightarrow \leftrightarrow AL \perp \leftrightarrow BFK(10)$

- KOLMOST ROVIN

DEF: Dvě roviny jsou k sobě kolmé $\Leftrightarrow$ jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině

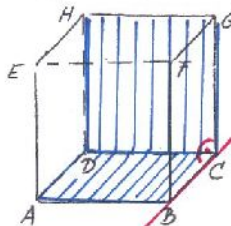
PLYNE: Je-li $p \perp q$, pak každá rovina σ obsahující přímku p je kolmá k rovině q .



Příklady

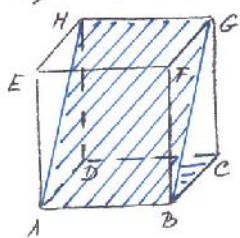
⑥ Různodélný a kolmosti rovin

a) ABC, CDH



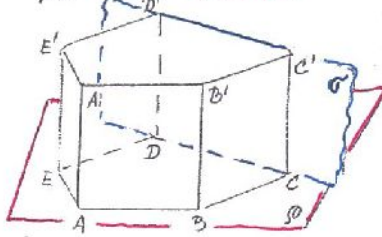
$\leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow ABC$
 $\leftrightarrow BC \perp \leftrightarrow CDH$
 $\Rightarrow \leftrightarrow ABC \perp \leftrightarrow CDH$

b) ABC, ABH



nýsou $\perp$
 každá z rovin
 obsahuje přímku
 $\perp$ k druhé rovině

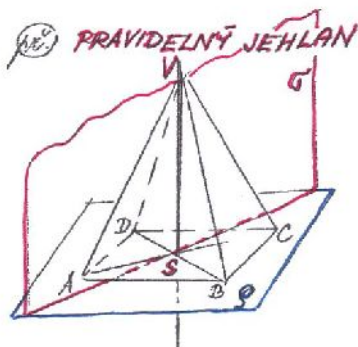
Pr. KOLMÝ HRANOL



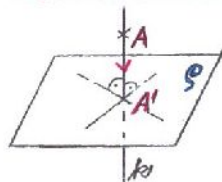
- podstavy shodné mnohoúhelníky
 - boční stěny obdelníky
 - rovina každé stěny (i každá rovina obsahující boční hranu)
 je kolmá k rovině obou podstav

$AA' \perp AB$
 $AA' \perp AE$
 $\Rightarrow AA' \perp \leftrightarrow ABE$
 $(\leftrightarrow ABC)$

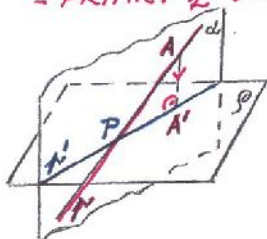
$AA'C \leftrightarrow ABB'(A') \Rightarrow$ podle def. $\leftrightarrow ABA' \perp \leftrightarrow ABC$
 (i další roviny obs. $\leftrightarrow AA'$)
 - obdobně pro další přímky



PRAVIDELNÝ JEHLAN
PRAVOUHLY PRŮMĚT
 - BODU A DO ROVINY ρ



- PŘÍMKY π DO ROVINY ρ



- každá rovina obsahující hlavní výškovou a střed podstavy je kolmá k rovině podstavy

$$\sigma \perp \rho$$

- také roviny úhlopříčných řezů ACI a BDV jsou k sobě kolmé

$$\Leftrightarrow SV \perp AC \Leftrightarrow SV \perp BD \Leftrightarrow SV \perp ABC(D)$$

$$\Rightarrow \forall \rho \text{ obsahující } SV \text{ je } \rho \perp \Leftrightarrow ABC$$

- jako A' kolmici vedené bodem A k rovině ρ

- pravoúhlý průmět libovolného geometrického útvaru do roviny ρ je množina pravoúhlých průmětů všech jeho bodů (pravoúhlý průmět - viz. případ komolitého promítání)

- pokud π není kolmá k ρ : $\pi \not\perp \rho$

- π přímka π , která je přísečnicí roviny ρ a roviny π , která obsahuje přímku π a je kolmá k rovině ρ

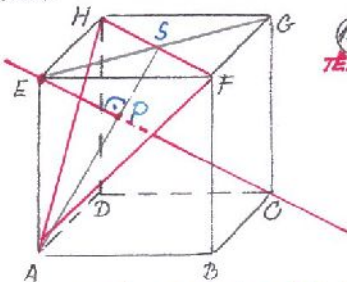
- pokud π je kolmá k ρ : $\pi \perp \rho$

- pravoúhlý průmět bodu (přísečky π a ρ)

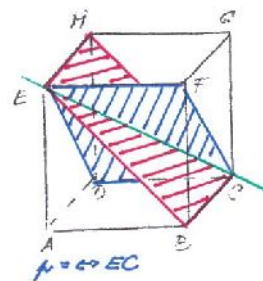
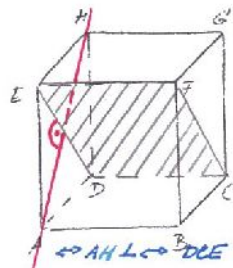
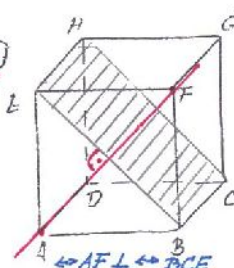
Příklady

④ Vrcholům E krychle ABCDEFGH vedl přímku kolmou k rovině AFH

3.8.66a



(LMP)
TEŽIT



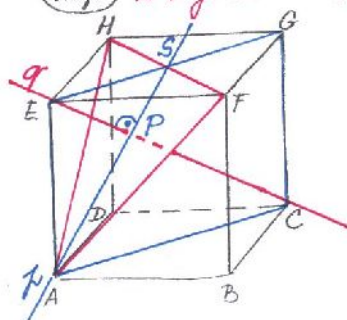
- uvažme roviny $\perp$ k AF a AH vedené bodem E ($\Leftrightarrow BCE$, $\Leftrightarrow DCE$) $\Rightarrow$ uvažme přísečnici $\rightarrow$ ta je $\perp$ k $\Leftrightarrow AFH$

uvažme přísečnici rovin vedených bodem E po řádku k přímce AF, AH roviny AFH $\Rightarrow$ podle kritéria $\perp$ p o ρ bude přísečnicí $\perp$ k $\Leftrightarrow AFH$

$$\Leftrightarrow AF \perp BE \Leftrightarrow AF \perp BCE$$

$$\Leftrightarrow AH \perp DE \Leftrightarrow AH \perp DCE$$

(LMP) **s využitím kolmých rovin (podmodulů)**



- $k \Leftrightarrow AFH$ hledáme rovinu kolmou a procházející bodem E [$\Leftrightarrow ACG \perp \Leftrightarrow AFH$]

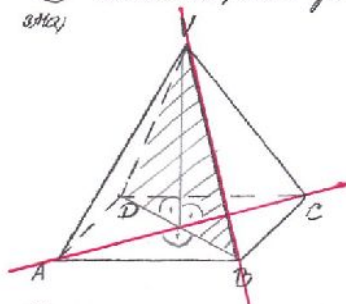
$$\Leftrightarrow ACG (\Leftrightarrow ECG) [\Leftrightarrow EG \perp \Leftrightarrow AFH \Rightarrow \Leftrightarrow ACG \perp \Leftrightarrow AFH]$$

- přísečnicí $\Leftrightarrow AFH \cap \Leftrightarrow ACG = \Leftrightarrow AS = \pi$

- hledaná kolmici $\pi \Leftrightarrow ACG$ a je kolmá k přísečnici $\pi = \Leftrightarrow AS \Rightarrow q = \Leftrightarrow EC, PE \cap \pi$

8) Dokažte, že v jehlanu $ABCDV$ je $\Leftrightarrow AC \perp \Leftrightarrow BV$

3.12

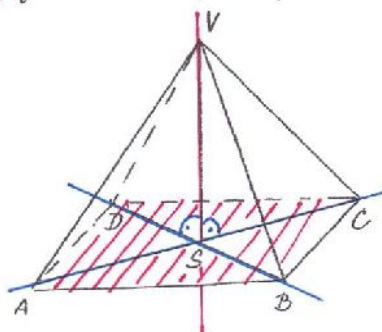


- hledáme $\varnothing \perp \Leftrightarrow AC$ tak, že $\Leftrightarrow BV \subset \varnothing \Rightarrow \Leftrightarrow BDV$
 $\Leftrightarrow BD \perp \Leftrightarrow AC \wedge \Leftrightarrow SV \perp \Leftrightarrow AC \Rightarrow \Leftrightarrow BDV \perp \Leftrightarrow AC$
 (viz keř. 1 p. a normy)

- $p \perp \varnothing \Leftrightarrow p \perp \forall q \subset \varnothing \Rightarrow \Leftrightarrow AC \perp \Leftrightarrow BV$ (BC)

9) Podstavou jehlanu $ABCDV$ je rombočtverec $ABCD$ se středem S , boční hrany jehlanu mají stejné délky. Dokažte, že přímka VS je kolmá k rovině podstavy.

3.12



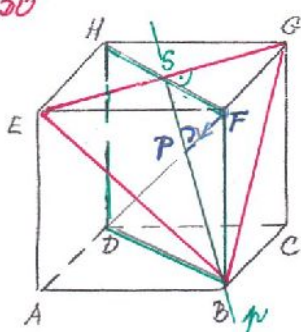
$\Leftrightarrow VS \perp \Leftrightarrow AC$ (VS nřka rovnom. ΔACV)
 $\Leftrightarrow VS \perp \Leftrightarrow BD$ (VS nřka rovnom. ΔBDV) $\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ podle keř. 1 p. a $\varnothing$ (hled. 2. úmnl. $C \Leftrightarrow ABC$
 kolm. na $\Leftrightarrow VS$)

$\Rightarrow \Leftrightarrow VS \perp \Leftrightarrow ABC$

10) Je dáná krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že polmív rombočtverci promitání pak kolmice vedení bodem F k rovině BEG .

3.13



1. nřkidení kolmých rovin

- $k \Leftrightarrow BEG$ hledáme rovinu $\perp$ proci.
 bodem $F \Rightarrow \Leftrightarrow BDH(F)$

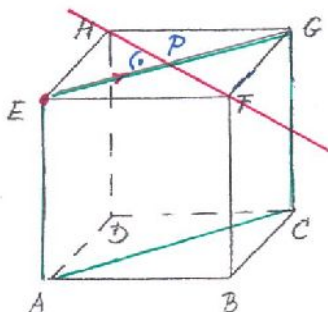
- přisčnici rovin je $\Leftrightarrow BS$

- kolmici leží v BDH a je $\perp$
 k přisčnici (poměři $\Leftrightarrow DF$)

$\{P\} \Rightarrow DF \cap \Leftrightarrow SB$

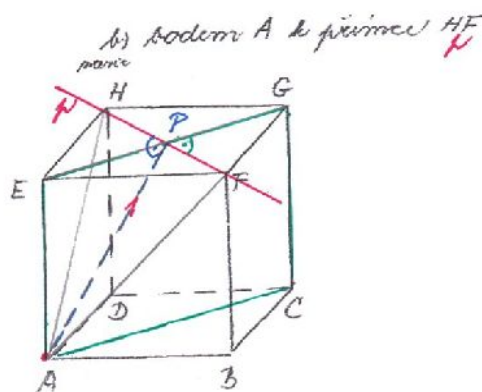
11) Ueřte, jaku kolmici vedení

3.14 a) bodem E k přímce HF



$\{P\} = \Leftrightarrow EG \cap \Leftrightarrow HF$

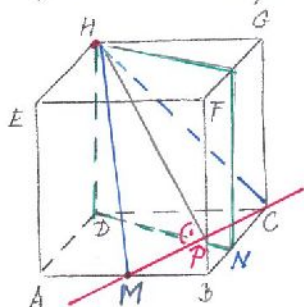
$[\varnothing \perp \Leftrightarrow HF \varnothing = \Leftrightarrow AEG]$



$\{P\} = p \cap \varnothing$

$[\varnothing = \Leftrightarrow ACG \varnothing \perp p]$

c) bodem H ležící na přímce CM (M leží na AB)

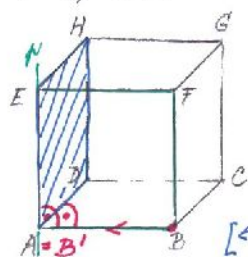


$$\{P\} = \leftrightarrow CM \cap \leftrightarrow DNH$$

$$[\leftrightarrow DNH \perp \leftrightarrow CM]$$

12) Uvěřte pravouhlý průmět bodu B do roviny [uvěříte viz str. 31]

3.41 a) ADH



$$\mu = \leftrightarrow AB$$

$$\mu \perp AE$$

$$\mu \perp AD \Rightarrow \mu \perp \leftrightarrow ADH$$

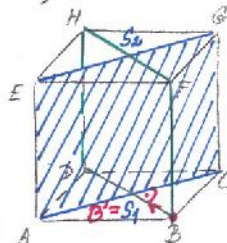
$$\mu \cap \leftrightarrow ADH = \{A\}$$

$$\Rightarrow B' = A$$

$$[\leftrightarrow AED \perp \leftrightarrow ADH \Rightarrow \mu = \leftrightarrow AE \text{ (přísečnice)}]$$

$$\Rightarrow \mu \perp \mu \text{ bodem B}$$

b) ACG



$$\mu = \leftrightarrow BD$$

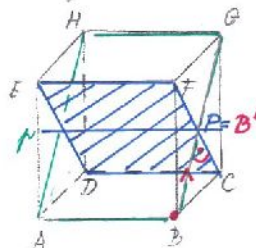
$$\mu \perp AC$$

$$\mu \perp AE \Rightarrow \mu \perp \leftrightarrow ACG$$

$$\mu \cap \leftrightarrow ACG = \{S_1\}$$

$$\Rightarrow B' = S_1$$

c) CDE



$$\mu = \leftrightarrow BG$$

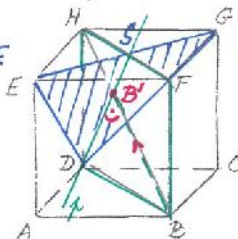
$$\mu \perp FC$$

$$\mu \perp CD \Rightarrow \mu \perp \leftrightarrow CDE$$

$$\mu \cap \leftrightarrow CDE = \{P\}$$

$$\Rightarrow B' = P$$

d) EDG



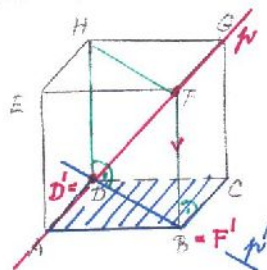
$$\mu = \leftrightarrow BH$$

$$\mu \perp DS$$

$$\mu \perp$$

13) Uvěřte pravouhlý průmět přímky DF do roviny [uvěříte viz str. 31]

3.42 a) ABC

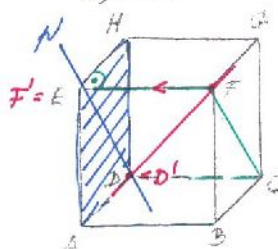


$$\mu \subset \alpha$$

$$\alpha = \leftrightarrow BFH(D)$$

$$\alpha \perp \leftrightarrow ABC$$

$$\mu' = \alpha \cap \leftrightarrow ABC \text{ (přísečnice)}$$

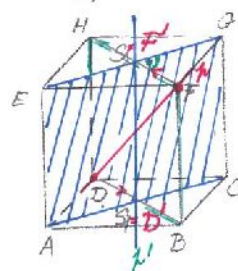


$$\mu \subset \leftrightarrow DFC(E)$$

$$\alpha \perp \leftrightarrow ADH$$

$$\mu' = \alpha \cap \leftrightarrow ADH \text{ (přísečnice)}$$

b) ACG

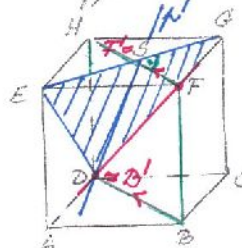


$$\mu \subset \leftrightarrow DFB$$

$$\alpha \perp \leftrightarrow ACG$$

$$\mu' = \alpha \cap \leftrightarrow ACG \text{ (přísečnice)}$$

c) DEG



$$\mu \subset \leftrightarrow DFB$$

$$\alpha \perp \leftrightarrow DEG$$

$$\mu' = \alpha \cap \leftrightarrow DEG \text{ (přísečnice)}$$